

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Группы и алгебры Ли
<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Зачет

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: А.И. Мудров, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры фундаментальной математики 28.03.2025

## Аннотация

Группа - это множество, на котором задана операция ассоциативного умножения с единицей, относительно которой каждый элемент обратим. Группы образуют фундаментальную алгебраическую структуру, формализующую понятие симметрии, и по этой причине играют исключительно важную роль в математике и ее приложениях. Группы Ли одновременно являются гладкими многообразиями и естественно возникают в качестве симметрий геометрических пространств. Линеаризация групповых преобразований приводит к богатой теории алгебр Ли, которая во многом параллельна теории групп Ли, но также представляет самостоятельный интерес. Алгебры Ли имеют больше представлений и приводят к далеко идущим обобщениям, например, таким, как супералгебры Ли и квантовые группы. Данный курс является введением в теорию групп и алгебр Ли теорию полупростых алгебр Ли с элементами теории представлений и приложениями к физическим проблемам.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Введение в теорию групп и алгебр Ли в объеме, необходимом будущим физикам-теоретикам.

### Задачи дисциплины

Сформировать представление о теории групп и алгебр Ли.

Обучить студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами теоретической физики и математики.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований

исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
---	---

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы теории групп и алгебр Ли и их представлений.

уметь:

производить вычисления с применением теории групп и их представлений.

владеть:

математическим аппаратом теории групп и алгебр Ли в применении к геометрическим и физическим задачам.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Конечные и матричные группы. Группы преобразований	3	3		3
2	Группы и алгебры Ли	3	3		3
3	Универсальные обертывающие алгебры	4	4		4
4	Разрешимые и полупростые алгебры Ли	4	4		4
5	Классификация полупростых алгебр Ли	4	4		4
6	Вещественные формы алгебр Ли	4	4		4
7	Представления конечных групп	4	4		4
8	Представления компактных групп	4	4		4
9	Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли	4	4		6
10	Конечномерные представления простых групп	4	4		6
11	Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли	4	4		6
12	Базис Гельфанда-Цейтлина	4	4		6
13	Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления	4	4		7
14	Однородные пространства	5	5		7
15	Связность	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Конечные и матричные группы. Группы преобразований

Группы, подгруппы, факторгруппы. Примеры групп преобразований.

###### 2. Группы и алгебры Ли

Топологические группы и группы Ли, алгебры Ли инвариантных векторных полей, эквивалентность категорий групп и алгебр Ли.

###### 3. Универсальные обертывающие алгебры

Универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли, теорема Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.

###### 4. Разрешимые и полупростые алгебры Ли

Разрешимые, и полупростые алгебры Ли, разложение Леви.

###### 5. Классификация полупростых алгебр Ли

Классификация Картана полупростых алгебр Ли.

###### 6. Вещественные формы алгебр Ли

Вещественные формы алгебр Ли, компактные алгебры Ли.

###### 7. Представления конечных групп

Представления конечных групп, симметрическая группа, диаграммы Юнга.

###### 8. Представления компактных групп

Представления компактных групп, разложение Петера-Вейля.

##### Семестр: 4 (Весенний)

###### 9. Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли

Конечномерные представления простых алгебр Ли..

###### 10. Конечномерные представления простых групп

Конечномерные представления  $SU(2)$  и  $SL(2, \mathbb{C})$  и их алгебр Ли.

###### 11. Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли

Конечномерные представления  $SU(N)$  и  $SL(N)$  и их алгебр Ли.

###### 12. Базис Гельфанда-Цейтлина

Разрешимые, и полупростые алгебры Ли, разложение Леви.

###### 13. Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления

Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления.

#### 14. Однородные пространства

Однородные пространства, действие группы на функциях, сферические функции.

#### 15. Связность

Связности в главных и векторных расслоениях. Теория калибровочных полей и физика элементарных частиц.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

### **6.Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Группы и алгебры Ли [Текст], учеб. пособие для вузов/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
2. Современная геометрия [Текст] : Методы и приложения : учеб. пособие для ун-тов / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— М. : Наука, 1979 .— 760 с.
3. Исаев А. П., Рубаков В. А., Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. — Москва, Россия: URSS, 2018. — С. 504

#### Дополнительная литература

1. Компактные группы Ли и их представления [Текст]/Д. П. Желобенко, -М., Наука, 1970
2. Представления редуцированных алгебр Ли [Текст]/Д. П. Желобенко, -М., Наука, 1994
3. Теория представлений групп и ее приложения [Текст]. В 2 т. Т. 1/А. Барут, Р. Рончка , -М., Мир, 1980
4. Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, издательство: Едиториал УРСС, 2002. 2018. — С. 504
5. Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, М.: МЦНМО, 2003 — 216.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Zoom, Skype

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Зачет

4 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.И. Мудров, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Группы и алгебры Ли» обучающийся должен:

### знать:

основы теории групп и алгебр Ли и их представлений.

### уметь:

производить вычисления с применением теории групп и их представлений.

### владеть:

математическим аппаратом теории групп и алгебр Ли в применении к геометрическим и физическим задачам.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов (11 семестр):

1. Формула Кэмпбела-Хаусдорфа.
2. Теорема Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.
3. Мера Хаара на группе Ли.
4. Форма Киллинга, полупростота.
5. Теорема Петера-Вейла для компактной группы Ли.
6. Базис Гельфанда-Цейтлина для конечномерных представлений  $SU(N)$ .
7. Оператор Лапласа на однородном пространстве.
8. Показать, что скобка Ли ассоциативна тогда и только тогда, когда образ коммутатора лежит в центре алгебры Ли.
9. Показать, что трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно векторного умножения.
10. Построить гомоморфизм  $SU(2)$  на  $SO(3)$ .

Примеры билетов (11 семестр):

Билет 1.

1. Преобразование Кэли.
2. Производный ряд, разрешимые алгебры Ли.

Билет 2.

- 1 Классификация Картана простых алгебр Ли. Диаграммы Дынкина.
2. Теорема Петера-Вейля для компактных групп Ли и их однородных пространств.

Перечень контрольных вопросов (12 семестр):

1. Разложить на неприводимые представления тензорное произведение присоединенного и определяющего представления  $SL(N)$ .
2. Показать, что коразмерность центра неабелевой алгебры Ли не меньше 2.
3. Вычислить производный и нижний центральный ряд данной матричной алгебры Ли.
4. Классифицировать все 2-мерные алгебры Ли.
5. Произвести редукцию Гельфанда-Цейтлина для представления сигнатуры (5,4) группы  $SO(5)$ .
6. Базис Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.
7. Полная приводимость конечномерных представлений простых комплексных алгебр Ли.
- 8 Групповая алгебра конечных групп.
- 9 Разложение Гельфанда-Цейтлина для представлений общей линейной группы.
- 10 Разложение тензорного произведения представлений общей линейной группы. Диаграммы Юнга.

Примеры билетов (12 семестр):

Билет 1.

1. Вычислить производный и нижний центральный ряд данной матричной алгебры Ли.
2. Классифицировать все 2-мерные алгебры Ли.

Билет 2.

1. Разложение Гельфанда-Цейтлина для представлений общей линейной группы.
2. Разложение тензорного произведения представлений общей линейной группы. Диаграммы Юнга.

## Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам.

В каждом билете представлено два теоретических вопроса.

При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку.

Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.